Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2017) p. 71-79
DOI: 10.2436/10.2006.03.10

EL CÀLCUL DIFERENCIAL AL SEGLE XVIII EN UNA CLASSE DE MATEMÀTIQUES

JOAQUIM BERENGUER
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.[1]

Paraules clau: *Cerdà, fluxió, càlcul diferencial i integral, segle xviii*

Teaching Eighteenth Century Fluxional Calculus in a Mathematics Class

Summary: *The aim of this work is to provide some tools with which the introduction of concepts into modern Differential Calculus became easier. Specifically, we would like to show the usefulness of the concept of fluxion as an historical tool, where geometrical and kinematical aspects are relevant, for introducing the concept of derivative. We wish to explain how two well-known problems, calculus of maxima and minima and drawing of a tangent, were solved in the beginning of Differential Calculus. In particular, we show how the Catalan mathematician Tomàs Cerdà (1715-1791) presents the idea of maxima and minima in his Tratado de Fluxiones and also how he connects a tangent to a curve with the fluxion of the variable involved in its equation.*

Key words: *Cerdà, fluxion, differential and integral calculus, 18th century*

Introducció

La introducció a l'ensenyament secundari del càlcul diferencial al voltant del concepte de derivada sempre ha estat un moment particularment important en el procés d'aprenentatge de l'alumne. Recuperar reflexions i presentacions que s'havien donat als inicis del càlcul diferencial en el segle xviii pot ser una eina molt útil en mans dels ensenyants. Explicar, a classe, com els matemàtics del segle xviii van introduir conceptes com els de *diferencial* o *fluxió*, quan aquest càlcul encara no havia estat dotat de tot el rigor matemàtic posterior però ja evidenciava el lligam que hi havia entre els nous conceptes i les propietats de les corbes o del moviment

1. Projecte de recerca 2016: «Matemáticas e ingeniería: nuevas perspectivas críticas (siglos xvi-xx)». Universitat Politècnica de Catalunya, HAR2016-75871-R.

dels cossos, pot resultar una manera que els alumnes entenguin millor la necessitat d'aquest nou càlcul. Per altra banda, presentar als alumnes els antecedents històrics del concepte de *derivada* és una forma d'avançar cap a una imatge dinàmica de la ciència, com una activitat humana en un determinat moment històric i en una determinada societat, ben allunyada de tot immobilisme i atemporalitat.

Amb aquest treball pretenem proporcionar algunes eines que puguin facilitar la introducció dels conceptes moderns en el càlcul diferencial actual. Concretament es tracta de mostrar la utilitat del concepte de *fluxió* com a eina històrica, on els aspectes geomètric i cinemàtic són determinants per tal d'introduir la definició del concepte de derivada. Ens proposem exposar com es resolien, en els inicis del càlcul diferencial, dos problemes ben coneguts pels alumnes: el càlcul de màxims i mínims d'una funció i la relació de la tangent a una corba amb la derivada de l'equació d'aquesta corba. Concretament mostrarem com Tomàs Cerdà (1715-1791), un matemàtic català, introdueix en el seu *Tratado de Fluxiones*[2] la noció de màxim i mínim d'una funció i com relaciona la tangent a una corba amb les fluxions de les variables que intervenen en la seva equació. Aquests dos exemples permetran a Cerdà explicar la noció de fluxió, comparant-la amb conceptes moderns com els de *derivada* o *diferencial*.

La fluxió segons Cerdà

Segons la visió newtoniana,[3] adoptada per Cerdà, tota magnitud geomètrica (línia, superfície o volum) es considera formada pel moviment d'una altra magnitud (punt, línia o superfície). De manera que una línia és generada per un punt en moviment; una superfície, pel moviment d'una línia, i un cos, pel moviment d'una superfície. La forma de mesurar el creixement o el decreixement de la magnitud, anomenada «fluent», està estretament lligada a la «velocitat» d'aquest creixement o decreixement i, segons Cerdà, la fluxió és l'increment finit d'aquesta fluent en un punt donat, si considerem que la velocitat de creixement (o decreixement) es manté constant a partir d'aquest punt.

Per exemple, en el cas de la fluxió d'una superfície curvilínia tindrem que la superfície ACD (fig. 1) està generada pel desplaçament de la recta que conté el segment CD paral·lelament a ella mateixa. Si se suposa que la velocitat de creixement de l'àrea s'ha de mantenir constant a partir d'una posició determinada, l'increment d'aquesta àrea serà el rectangle $CcdD$ –ja que la longitud CD s'ha de mantenir constant– per un determinat increment Dd.

Per a Cerdà l'increment de l'abscissa Dd és dx i, si $AD = x$ i $CD = y$, es tindrà que la fluxió de ACD serà ydx, és a dir, l'àrea del rectangle $CcdD$.

Avui dia, si anomenem S la funció que ens dona la superfície ACD i y és la funció que correspon a la corba, a partir del teorema fonamental del càlcul podríem escriure $dS = ydx$. Amb això observem la coincidència amb el resultat de Cerdà, i, per tant, que la fluxió introduïda per aquest autor s'aproxima a la noció actual de diferencial.

2. El *Tratado de Fluxiones* de Cerdà és una adaptació de *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) del matemàtic britànic Thomas Simpson (1710-1761).

3. Es pot analitzar la concepció newtoniana del càlcul diferencial a partir de textos originals del mateix Isaac Newton (1642-1727), com és el *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671). I també a partir de nombrosos historiadors que han estudiat el càlcul fluxional newtonià com Niccolò Guicciardini amb el seu llibre Isaac *Newton on mathematical certainty and method* (2009), entre d'altres.

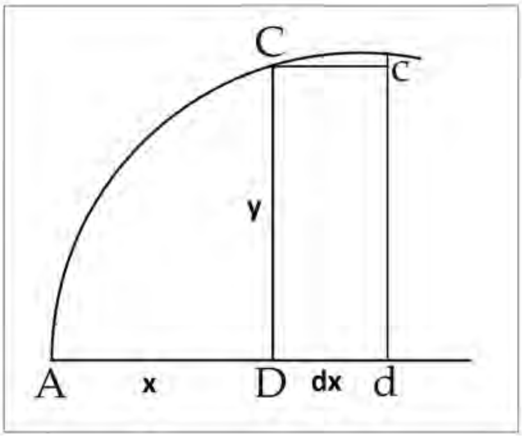

FIGURA 1. Fluxió d'una superfície curvilínia

La derivada i la fluxió

L'anterior resultat porta a la conclusió que la noció de Cerdà coincideix amb el nostre concepte de diferencial i que, en canvi, l'actual derivada s'aproximaria més a una raó de fluxions.

Efectivament, si es volgués calcular la derivada d'una funció determinada, com per exemple la següent: $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$, aplicaríem les regles de derivació prèviament apreses i es tindria: $y' = 3x^2 + 4x - 3$.

Cerdà quasi operaria de la mateixa manera, però aplicaria la definició de fluxió i les regles, també prèviament deduïdes, als dos termes de la igualtat:

$$dy = 3x^2dx + 4xdx - 3dx$$

De manera que la nostra derivada vindria donada per la raó de les fluxions:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 3$$

De fet, Cerdà mateix reconeix que el que interessa és la raó de les fluxions, particularment si es té en compte que dx coincideix amb un increment constant de la variable x, ja que gairebé sempre considera el moviment de x uniforme.

Màxims i mínims d'una funció

En la introducció del capítol 5 del *Tratado de Fluxiones* de Cerdà, l'autor explica que un màxim o mínim d'una funció és el punt on la «quantitat» que estava creixent deixa de créixer o viceversa. A continuació, Cerdà justifica que en un màxim o mínim la fluxió –estretament relacionada amb la velocitat de creixement (decreixement)– ha d'anul·lar-se, justament a partir de la idea que la quantitat que estava creixent (decreixent) en el punt considerat deixa de créixer (decréixer):

> Como cuando una cantidad variable llega a ser máxima ya no puede aumentarse más, su fluxión en este punto será = 0. Mas cuando la Cantidad variable llega a ser *mínima* ya no puede disminuirse más, su Fluxión disminuyendo también debe ser = 0, luego en aquellos puntos en que la Fluxión de la variable es = 0, la tal Cantidad será un máximo o un mínimo; (Cerdà, 1757-1759: f. 3r.)

Per saber si en un punt *a* la variable té un màxim o un mínim, Cerdà estableix com a criteri l'estudi del signe de la fluxió de la variable a les «proximitats» de *a*. I, sense més justificació, considera que quan la variable creix la seva fluxió serà positiva mentre que quan decreix la fluxió serà negativa:

> Para discernir determinadamente si la Fluente es un *Máximo* o un *Mínimo* hay una Regla infalible, y es examinar si el valor de la Fluxión un poco antes de llegar a ser = *0* es *positivo* o es *negativo*. *Si la Fluxión es cantidad positiva, la Fluente que se le sigue, hecha la Fluxión igual a 0, es un Máximo, si la fluxión es cantidad negativa, la Fluente es un Mínimo*, porque mientras una cantidad va creciendo, su Fluxión es positiva, y mientras va disminuyendo, su Fluxión es negativa. (Cerdà, 1757-1759: f. 15r.)

Per a un dels exemples que pren on la funció és $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4$ en calcula la fluxió $12x^3\,dx - 84ax^2\,dx + 168a^2\,xdx - 96a^3\,dx = 12dx \times (x - a) \times (x - 2a) \times (x - 4a)$. Els valors pels quals la fluxió s'anul·la són *a, 2a i 4a*, per tant, en aquests valors la funció (fluent) pot tenir algun màxim o mínim, i a partir d'aquí Cerdà inicia l'estudi del signe de la fluxió en les proximitats de cada un d'aquests tres valors:

> Siendo esta Fluente variable, mientras x se mantiene $< a$, la Cantidad $(x - a)(x - 2a)(x - 4a)$ es negativa, por ser un producto de tres Factores negativos, por consiguiente aún multiplicada por $+12dx$, será negativa y así la Fluxión de toda la Cantidad es a saber $12dx \times (x - a) \times (x - 2a) \times (x - 4a)$ es negativa y la Fluente que le sigue, cuando llega a ser $x = a$, O, lo que es lo mismo $x - a = 0$, será un *Mínimo*. (Cerdà, 1757-1759: f. 15v.)

I continua, de la mateixa manera per a la resta de valors *2a i 4a.*

En un altre exemple on la funció és $24a^3\,x - 30a^2\,x^2 + 16ax^3 - 3x^4$ i la seva fluxió $24a^3\,dx - 60a^2\,xdx + 48ax^2\,dx - 2x^3\,dx = 12dx \times (a - x) \times (a - x) \times (2a - x)$, mostra com, a partir de l'estudi del signe de la fluxió, en algun punt on aquesta s'anul·la pot no haver-hi ni màxim ni mínim:

> [...] la fluente que resulta cuando $x{=}a$ ni es máxima ni mínima, porque tomado x un poco *menor* que a, y un poco *mayor* que a, siempre la fluxión es positiva, por ser en el primer caso entrambos factores a-x, a-x, positivos y en el segundo entrambos negativos y siempre la fluxión positiva, por consiguiente cuando $x{=}a$, la fluente ni es máxima ni es mínima, entendido este máximo y mínimo según la definición que dimos, esto es que acabado de crecer la variable disminuirá. (Cerdà, 1757-1759: f. 105.)

Cerdà il·lustra aquest cas amb la gràfica de la funció que coincideix amb la que apareix en el text de Simpson (fig. 2).

Cerdà explica com en l'abscissa $a = AB$ la corba, tot i que la fluxió s'anul·la, tant a l'esquerra com a la dreta de a, l'ordenada no deixa de créixer. El desenvolupament de Cerdà per tractar el tema dels màxims i mínims d'una funció és, doncs, de plena actualitat i els seus exemples poden servir directament com a exercicis per a explicar els criteris per distingir quan una funció té un màxim o un mínim. El darrer exemple donat per Cerdà, a més, pot servir per a introduir el punt d'inflexió d'una corba.

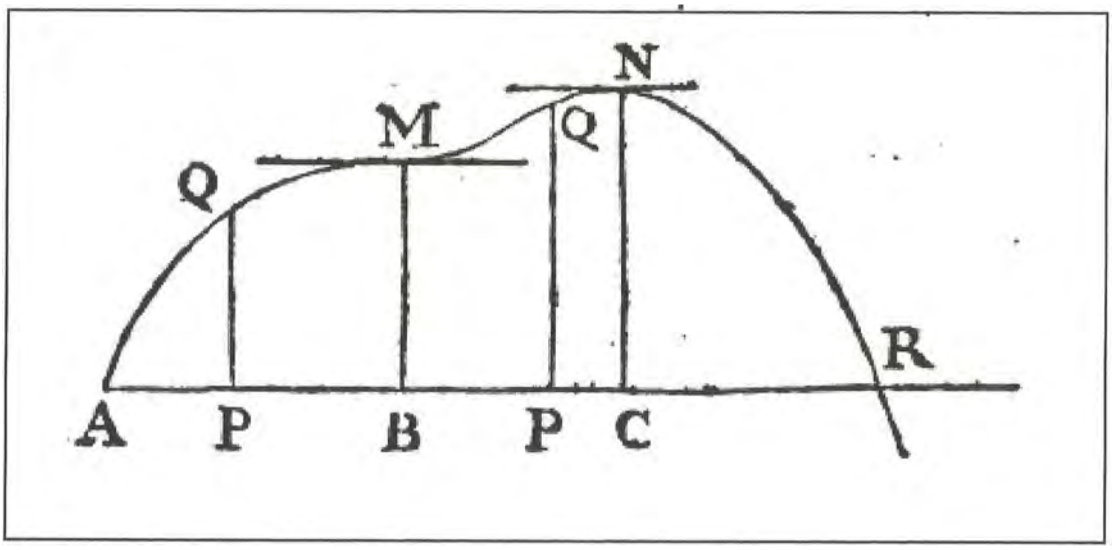

FIGURA 2. Criteris per a distingir màxims i mínims

La tangent a una corba

El capítol 6 del *Tratado de Fluxiones* de Cerdà està dedicat a explicar la relació entre les fluxions d'unes variables i la tangent a la corba que representen aquestes variables.

Per dibuixar una tangent a una corba, el que cal és trobar un altre punt, a més del de tangència. Calculant *mB*, anomenada subtangent, on *m* és l'abscissa del punt *D* de tangència, aconseguirem aquest altre punt *B*.

Una corba *ADF* és vista com a generada per dos moviments. Al mateix temps que la recta *mn* es mou paral·lelament a ella mateixa el punt *p* es mou sobre la recta *mn* i la combinació dels dos moviments genera la corba (fig. 3).

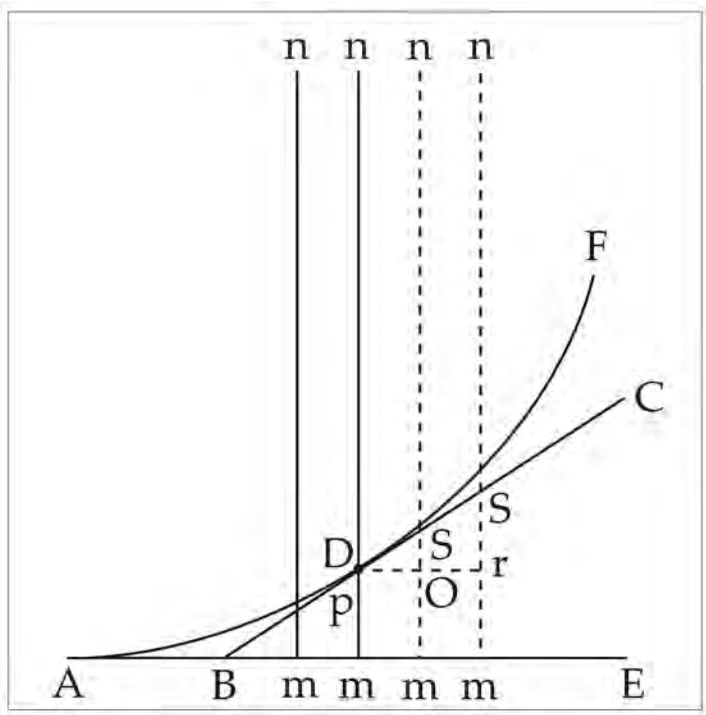

FIGURA 3. Tangent per sota d'una corba

La corba, per tant, quedarà determinada per dues variables que Cerdà anomena *Am* = *x* i *pm* = *y*. La fluxió d'*Am*, en el punt *D*, és a dir *dx*, la representa per *Dr*, que ve donada per la velocitat a la qual es mou la recta *mn* en el punt *D*. La fluxió de *pm*, en el punt *D*, és dir *dy*, la representa per *rS*, que ve donada per la velocitat del punt *p* sobre la recta *mn*. Aleshores considera la recta *SD*, que tallarà l'eix *AE* en el punt *B*.

Cerdà considera, d'entrada, el moviment de la recta *mn* uniforme i, per tant, *dx* és constant per un interval de temps determinat. En canvi, el moviment del punt *p* pot ser accelerat o desaccelerat. Cerdà argumenta que si el moviment del punt *p* fos també uniforme, aquest es trobaria sobre la recta *SD*, ja que *Dr* i *rS* serien les distàncies recorregudes pel moviment de la recta *mn* i pel punt *p* respectivament en un mateix interval de temps. Efectivament, si els dos moviments fossin uniformes, la raó entre les distàncies *Dr* i *rS*, o *DO* i *OS*, recorregudes per aquests, es mantindria constant i el resultat de la combinació dels dos moviments coincidiria amb la recta *SD*. En canvi, si el moviment de *p* sobre la recta *mn* és accelerat l'espai realment descrit serà més gran que el descrit amb un moviment uniforme i el moviment resultant del punt *p* descriurà una corba per sobre la recta *BC*, que correspon al d'un moviment uniforme (fig. 3). Si el moviment de *p* sobre la recta *mn* és desaccelerat, l'espai realment descrit serà més petit que el descrit amb un moviment uniforme i el moviment resultant del punt *p* descriurà una corba per sota la recta *BC* (fig. 4). Però, en qualsevol cas, la corba sempre «quedarà a una banda» de la recta *BDC*, de manera que aquesta és la tangent a la corba en el punt *D*. Cerdà, en aquest punt, no té en compte la possibilitat que en el punt *D* hi hagués una inflexió, és a dir que el moviment del punt *p* passés de ser accelerat a desaccelerat o a l'inrevés.

En resum, Cerdà, d'aquesta manera, arriba a la conclusió que la recta que passa pel punt *D*, construïda a partir de les fluxions de les dues variables que defineixen la corba –de fet la recta té per pendent la raó entre aquestes fluxions–, és la tangent a aquesta. Tot i que Cerdà, en aquest apartat, no parli de la concavitat d'una corba, està clar que el seu raonament està estretament relacionat amb aquest concepte i el seu discurs pot facilitar la introducció d'aquest concepte a la classe.

A partir d'aquí es podrà trobar el punt *B*, que permetrà dibuixar la tangent. Efectivament, els triangles *SrD* i *DmB* són semblants i, per tant, es tindrà: $\frac{Sr}{rD} = \frac{Dm}{mB}$ o sia: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{mB}$, d'on $mB = \frac{ydx}{dy}$.

Adaptant el raonament de Cerdà als conceptes i notació actuals, es podria considerar, en un punt d'una corba, construir la recta que té per pendent la derivada de la funció en aquest punt i, un cop dibuixada, comprovar que aquesta recta és la tangent a la corba en aquest punt, és a dir que la corba «queda a una banda» de la recta en les «proximitats del punt».

Quan Cerdà analitza si el moviment de l'ordenada s'accelera respecte al de l'abscissa, equival a analitzar el comportament de la funció derivada, és a dir, preguntar-se sobre el seu creixement o decreixement –sobre el signe de *y*". Si la funció derivada és creixent, significa que per un mateix interval de temps l'increment real de l'ordenada *y* serà superior que el que es produeix sobre la recta que té per pendent el valor de la derivada en el punt considerat (fig. 5), és a dir, per a l'increment $x - a$ entre els punts *B* i *C* es tindrà: $y_2 - b > y_1 - b$.

Per tant, la corba estarà per sobre de la recta. I si *y'* és decreixent a l'inrevés. Entre altres coses, això permet relacionar la concavitat de la corba amb el signe de la *y*". Com també permet ampliar el raonament de Cerdà amb el cas que en el punt considerat hi hagi una inflexió.

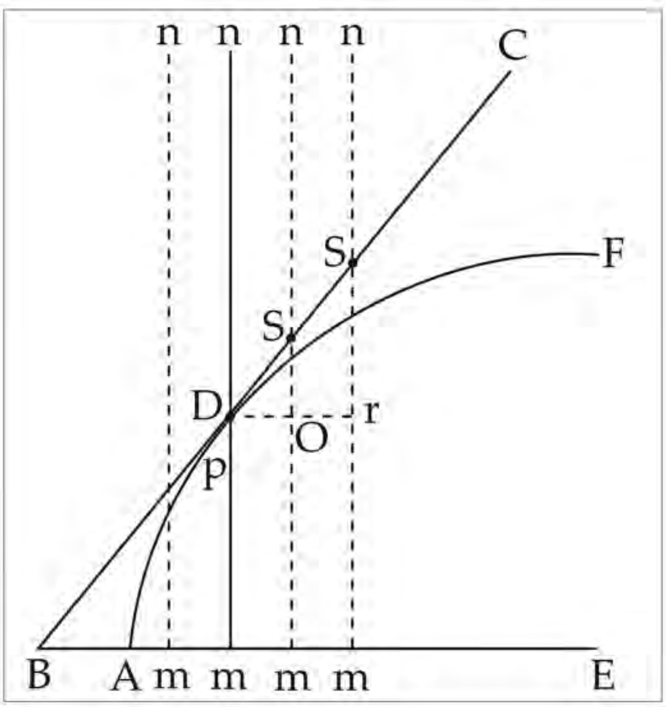

FIGURA 4. Tangent per sobre d'una corba

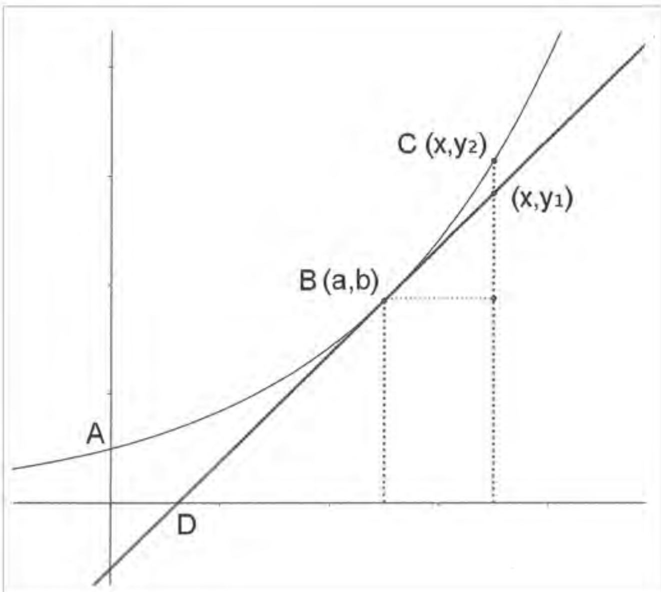

FIGURA 5. La tangent a una corba i la seva derivada

Algunes reflexions finals

Pensem que, efectivament, el concepte de *fluxió*, sota una visió geomètrico-cinemàtica, introduït per Cerdà pot ajudar els alumnes entendre millor la noció actual de derivada. Per altra banda, el discurs de Cerdà manté plena actualitat, particularment quan tracta el tema de màxims i mínims. Però és clar que no es poden donar receptes de com utilitzar aquestes eines històriques a la classe, sinó que, simplement, es mostren exemples que, tot i correspondre a moments històrics on no estaven clars ni el concepte de *funció* ni el de *límit*, poden donar elements a l'ensenyant per utilitzar a la classe. Cada ensenyant hauria de veure com, segons la dinàmica de la classe, pot aprofitar aquests exercicis de Cerdà. Una possibilitat és que siguin explicats després d'haver introduït els conceptes de *derivada* i de *diferencial*, si escau. Una segona opció és explicar-los abans d'introduir el concepte de derivada actual i, en qualsevol cas, discutir les similituds i diferències entre els dos sistemes conceptuals, analitzant la relació entre els dos. Finalment, una tercera opció és que l'ensenyant reculli prèviament els elements que li semblin més suggestius del discurs de Cerdà i els incorpori a un llenguatge i una notació moderns.

Referències bibliogràfiques

BERENGUER, Joaquim (2015), *Cerdà (1757-1759). Tratado de Fluxiones*, Barcelona, Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona; amb el suport del projecte HAR2013-44643-R (Ministerio de Economía y Competividad) i del projecte SGR (grup de recerca consolidat) HIS-STM (SGR 1410), [en línia] <http://ccuc.cbuc.cat/search~S20*spi?/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&SUBKEY=Cerd%C3%A0/1%2C23%2C23%2CB/frameset&FF=XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&3%2C3%2C>

BERENGUER, Joaquim (2016), *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*. Tesi doctoral en Història de la Ciència dirigida per la doctora M. Rosa Massa Esteve. Universitat Autonòma de Barcelona, [en línia] <http://www.tdx.cat/handle/10803/367217 https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1211406>

CERDÀ, Tomàs (1757-1759), *Tratado de Fluxiones*, RAH, Cortes 9/2792, 9/2812.

GUICCIARDINI, Niccolò (2009), *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, Cambridge, Massachusetts, Londres, The MIT Press.

NEWTON, Isaac (1671), *The Method of Fluxions and Infinite Series*, translated from the Author's Latin original [*Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*] not yet made publik [...] by John Colson, M. A. and F. R. S. Londres, printed by Henry Woodfall. 1736.

SIMPSON, Thomas (1750), *The Doctrine and Application of Fluxions*, Londres, printed by J. Nourse.